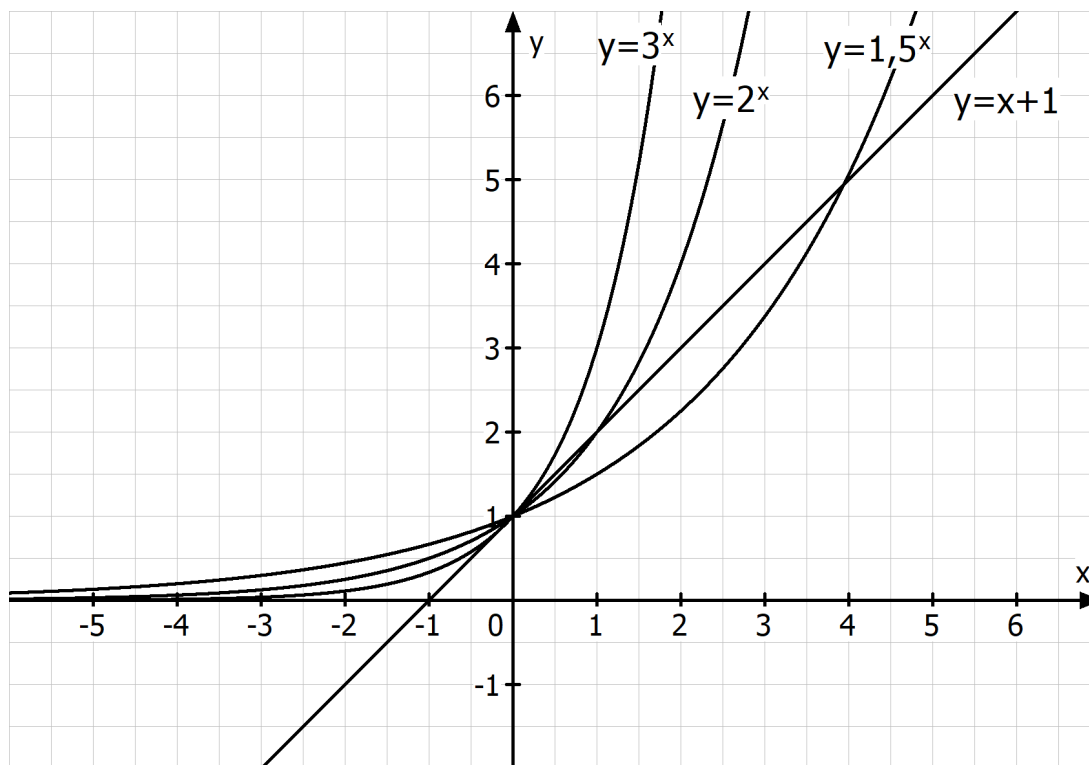


Die e-Funktion

Beispiel:

Gesucht ist diejenige Exponentialfunktion, deren Tangente die y-Achse im Punkt S(0/1) unter 45° schneidet.



Vermutung:

Berechnung von b: Berechnung der Steigung von $f(x) = b^x$ im Punkt S(0/1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - b^0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = 1$$

Für x nahe bei Null gilt also:

$$\frac{b^x - 1}{x} \approx 1 \Rightarrow b^x \approx x + 1 \Rightarrow b \approx (x + 1)^{\frac{1}{x}}$$

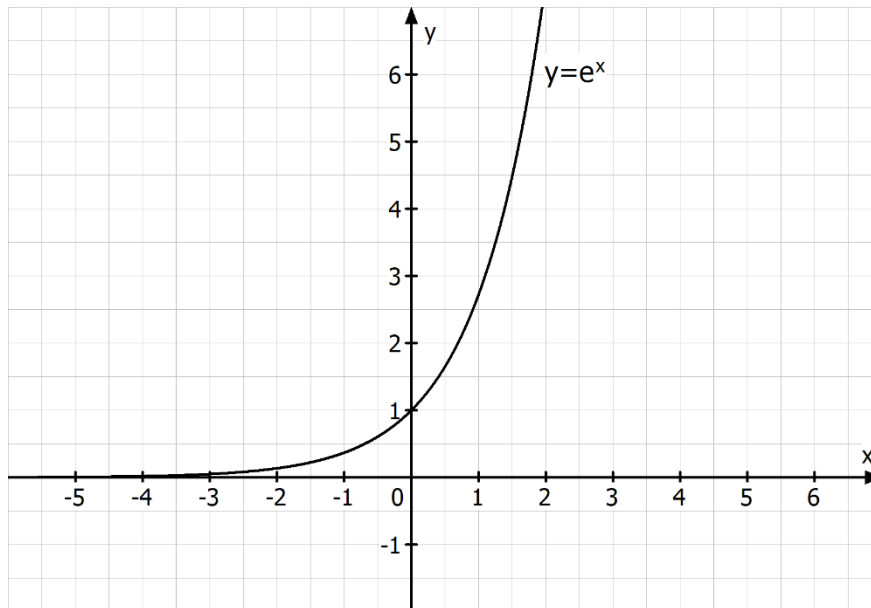
$$\text{Setze } r = \frac{1}{x} \Rightarrow b \approx \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r$$

$$\Rightarrow b = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r \quad (x \rightarrow 0 \text{ entspricht } r \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r =: e \quad e \text{ ist die Eulersche Zahl } (\approx 2,71828...)$$

Die gesuchte Exponentialfunktion lautet also: $f(x) = e^x$

Graph der e-Funktion:



Eigenschaften der e-Funktion:

1) Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$ Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}^+$

2) Nullstellen: keine

3) Monotonieverhalten: G_f ist streng monoton steigend

4) Grenzverhalten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x) \text{ existiert nicht } e^x \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$$

5) Ableitung:

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

Bemerkung: Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion

$$f(x) = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

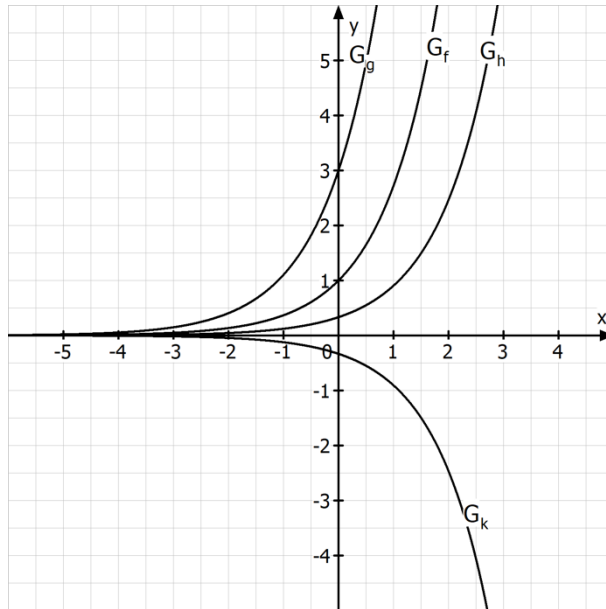
$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

6) Stammfunktion: $\int e^x dx = e^x + C$

Einfluss der Parameter a, c, d und y_0 auf den Verlauf des Graphen der allgemeinen natürlichen Exponentialfunktion f der Form $f(x) = a \cdot e^{c(x-d)} + y_0$ mit $a, c, d, y_0 \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \neq 0$:

Einfluss des Parameters a:

Beispiele: $f(x) = e^x$ $g(x) = 3e^x$ $h(x) = \frac{1}{3}e^x$ $k(x) = -\frac{1}{3}e^x$



Der Parameter a beeinflusst die Steigung des Funktionsgraphen

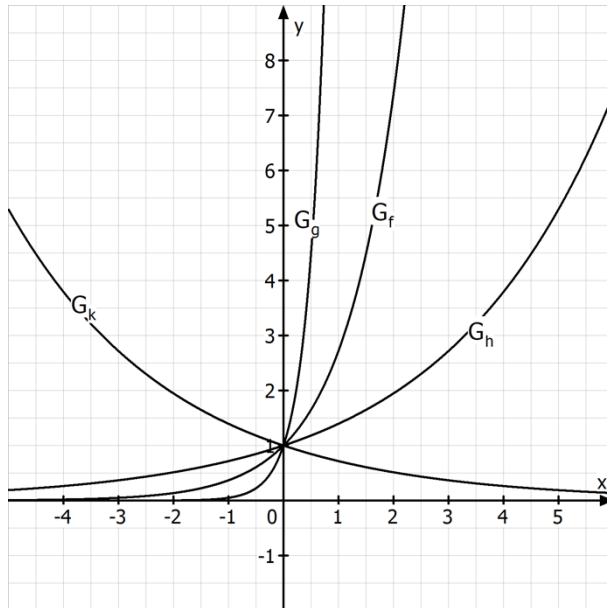
$a > 1$: Der Graph steigt schneller gegenüber dem Graphen der e-Funktion

$0 < a < 1$: Der Graph steigt langsamer gegenüber dem Graphen der e-Funktion

Für $a > 0$ verläuft der Graph oberhalb, für $a < 0$ unterhalb der x-Achse.

Einfluss des Parameters c:

Beispiele: $f(x) = e^x$ $g(x) = e^{3x}$ $h(x) = e^{\frac{1}{3}x}$ $k(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$



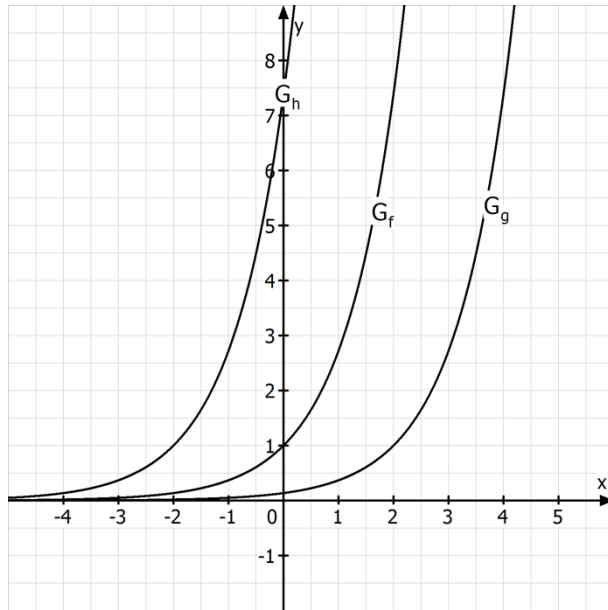
$c > 1$: Der Graph strebt schneller gegen Unendlich bzw. gegen die Asymptote als die e-Funktion.

$0 < c < 1$: Der Graph strebt langsamer gegen Unendlich bzw. gegen die Asymptote als die e-Funktion.

Für $c > 0$ steigt der Graph (exponentielles Wachstum) und für $c < 0$ fällt der Graph (exponentieller Zerfall).

Einfluss des Parameters d:

Beispiele: $f(x) = e^x$ $g(x) = e^{x-2}$ $h(x) = e^{x+2}$

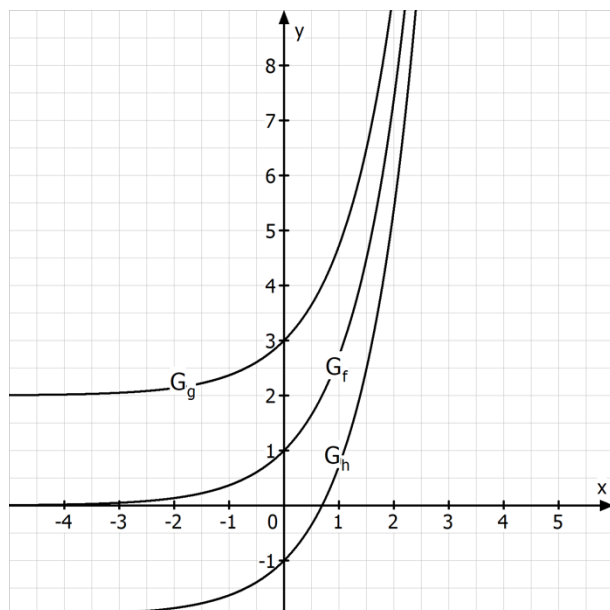


$d > 0$: Verschiebung um d Einheiten nach rechts.

$d < 0$: Verschiebung um d Einheiten nach links.

Einfluss des Parameters y_0 :

Beispiele: $f(x) = e^x$ $g(x) = e^x + 2$ $h(x) = e^x - 2$



$y_0 > 0$: Verschiebung nach oben.

$y_0 < 0$: Verschiebung nach unten.

Für die Asymptote gilt die Gleichung $y = y_0$

Aufgaben:

1.0 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f. Beschreiben Sie, wie man ihn durch Veränderung des Graphen der e-Funktion erhält.

1.1 $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ ☐

1.2 $f(x) = e^{-3x}$ ☐

1.3 $f(x) = 2e^x - 3$ ☐

1.4 $f(x) = e^{x+0,5} + 1$ ☒

1.5 $f(x) = -4e^{2(x-2)}$ ☒

1.6 $f(x) = -e^{-3x+3} + 2$ ☒

2.0 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 4e^{0,22x} + 2$.

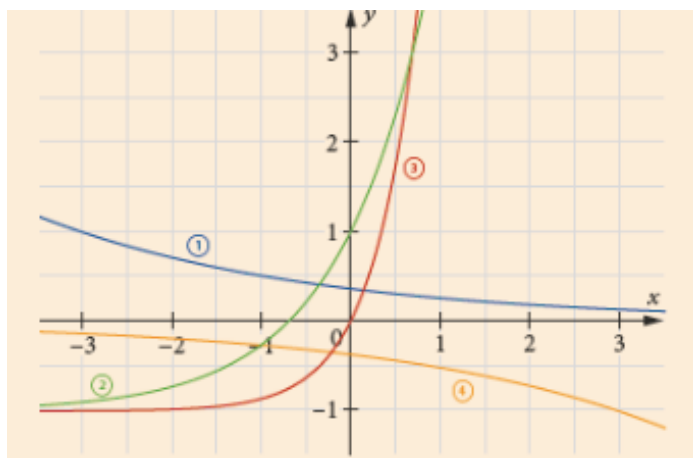
2.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts vom Graphen mit der y-Achse. ☐

2.2 Geben Sie die Gleichung der Asymptoten an. Beschreiben Sie, für welche x-Werte sich der Graph der Asymptote annähert. ☐

2.3 Skizzieren Sie den Graphen von f in einem geeigneten Koordinatensystem. Begründen Sie am Graphen und anhand der Funktionsgleichung, ob es sich um eine Wachstums- oder eine Zerfallsfunktion handelt. ☐

3 Ordnen Sie die folgenden Funktionen ihren Graphen zu. Begründen Sie. ☐

a) $f(x) = -e^{\frac{1}{3}x-1}$ b) $g(x) = e^{-\frac{1}{3}x-1}$ c) $h(x) = e^{2x} - 1$ d) $i(x) = 2e^x - 1$



4.0 Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = e^{-x}$ sowie die Funktion g mit $g(x) = ae^{-(x-d)} + y_0$.
Bestimmen Sie reelle Zahlen für a , d und y_0 so, dass der Graph von g im Vergleich zum Graphen von f

4.1 an der x -Achse gespiegelt ist. ☐

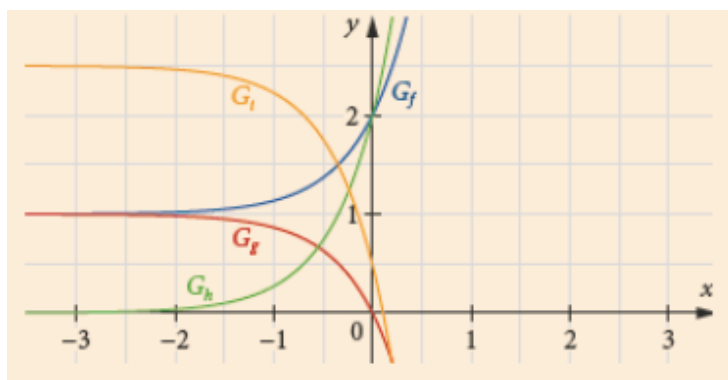
4.2 um 2 Einheiten nach unten verschoben ist. ☐

4.3 mit dem Faktor 0,5 in y -Richtung gestreckt ist. ☐

4.4 um 3 Einheiten in x -Richtung verschoben ist. ☐

4.5 an der x -Achse gespiegelt, um 2 Einheiten nach unten und um 3 Einheiten in x -Richtung verschoben sowie mit dem Faktor 0,5 in y -Richtung gestaucht ist. ☒

5 Gegeben sind die vier Funktionsgraphen der Form $y = ae^{2x} + y_0$.
Bestimmen Sie die Werte für a und y_0 anhand der Funktionsgraphen. ☒



6.0 Aggressive Bakterien vervielfachen sich alle zwei Stunden.

6.1 Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien nach 4, 6, 10, 15 bzw. 18,5 Stunden, wenn anfangs 125 Bakterien vorhanden waren. ☐

6.2 Angenommen die Bakterien haben sich mit demselben Faktor schon die letzten vier Stunden vermehrt.
Berechnen Sie ihre Anzahl vor 2,3 bzw. 4 Stunden. ☐

6.3 Erläutern Sie die Nachteile dieses Modells. ☐

7.0 Sind die Aussagen wahr oder falsch ?

Zeichnen Sie bei wahren Aussagen einen Beispielgraphen und korrigieren Sie falsche Aussagen.

7.1 Der Funktionsgraph einer natürlichen Exponentialfunktion wird für $x \rightarrow \infty$ immer steiler. ☐

7.2 Der Parameter a hat bei der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot e^x + y_0$ keinen Einfluss auf das Steigungsverhalten. ☐

7.3 Mithilfe der Parameters c kann bei Funktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{c(x-d)}$ der Graph an der y -Achse gespiegelt werden. ☐

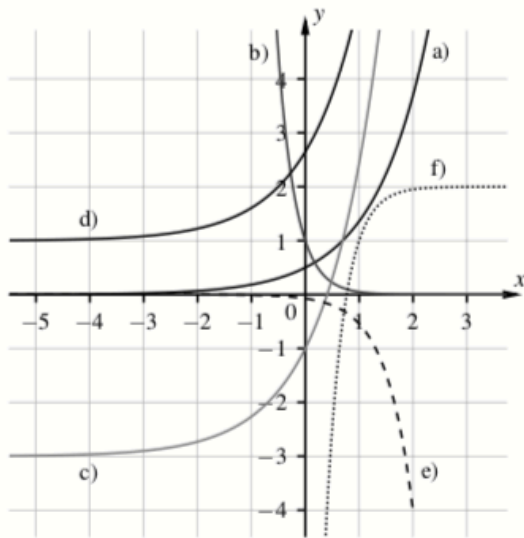
7.4 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x \cdot 5e^{-3(x-7)}$ hat keine Nullstelle. ☒

7.5 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot e^{x+3}$ hat keine Extremstellen. ☒

Lösungen:

1)

1.



a) $f(x) = \frac{1}{2}e^x$: Der Graph steigt langsamer als die e-Funktion und schneidet die y-Achse bei $S_y(0|0,5)$.

b) $f(x) = e^{-3x}$: Der Graph ist streng monoton fallend, an der y-Achse gespiegelt und steiler als die e-Funktion. Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0|1)$.

c) $f(x) = 2e^x - 3$: Der Graph ist steiler als die e-Funktion und um 3 LE nach unten verschoben. Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0|-1)$.

d) $f(x) = e^{x+0,5} + 1$: Der Graph der e-Funktion ist um 0,5 LE nach links und um 1 LE nach oben verschoben. Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0|e^{0,5} + 1)$.

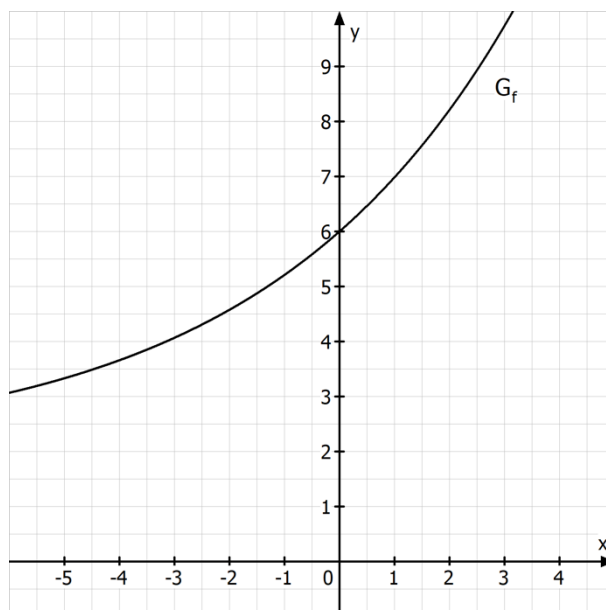
e) $f(x) = -4e^{2(x-2)}$: Der Graph ist streng monoton fallend, an der x-Achse gespiegelt, steiler als die e-Funktion und um 2 LE nach rechts verschoben. Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0|-4e^{-4})$.

f) $f(x) = -e^{-3x+3} + 2$: Der Graph ist streng monoton steigend, an der x-Achse und y-Achse gespiegelt, um 3 LE nach links und um 2 LE nach oben verschoben. Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0|-e^3 + 2)$.

2.1 $f(0) = 4e^{0,22 \cdot 0} + 2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow S_y(0|6)$

2.2 Asymptote $y = 2$ für x gegen minus unendlich

2.3



Da der Faktor c einen Wert von $c = 22 > 0$ hat, handelt es sich um eine Wachstumsfunktion.

3a) $f(x)$ 4: Der Graph ist streng monoton fallend und hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse bei $S_y(0/-e^{-1})$.

3b) $g(x)$ 1: Der Graph ist streng monoton fallend und hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse bei $S_y(0/e^{-1})$.

3c) $h(x)$ 3: Der Graph ist streng monoton steigend und hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse bei $S_y(0/0)$.

3d) $i(x)$ 2: Der Graph ist streng monoton steigend und hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse bei $S_y(0/1)$.

4.1 $a=-1 \quad d=0 \quad y_0=0$

4.2 $a=1 \quad d=0 \quad y_0=-2$

4.3 $a=0,5 \quad d=0 \quad y_0=0$

4.4 $a=1 \quad d=3 \quad y_0=0$

4.5 $a=-0,5 \quad d=3 \quad y_0=-2$

5 $f(x)=e^{2x}+1 \quad g(x)=-e^{2x}+1 \quad h(x)=2e^{2x} \quad i(x)=-2e^{2x}+2,5$

6.1

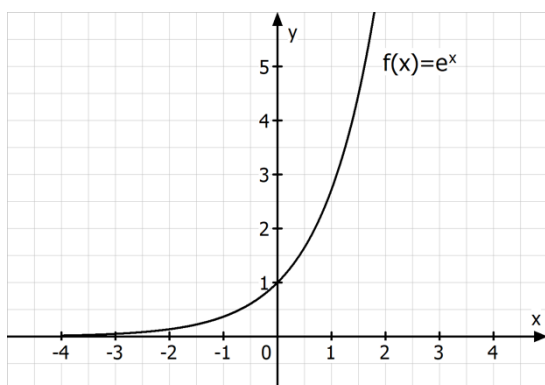
$$f(t)=125 \cdot 5^{\frac{t}{2}}$$

$$f(4)=3125 \quad f(6)=15625 \quad f(10)=390625 \quad f(15) \approx 21836601 \quad f(18,5) \approx 365075386$$

6.2 $f(-2)=25 \quad f(-3)=11,18 \quad f(-4)=5$

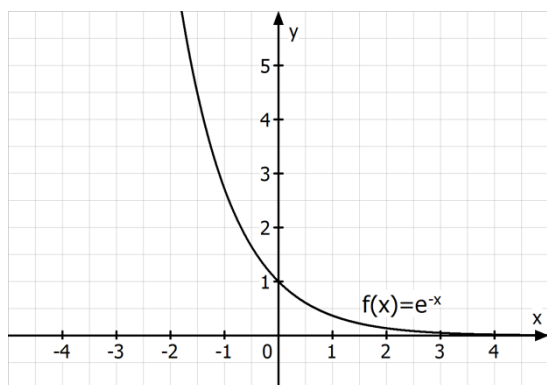
6.3 Nach diesem Modell könnte man beliebig weit zurückrechnen, aber ab einem genügend weit zurückliegenden Zeitpunkt liegt dann die Menge an Bakterien zwischen 0 und 1.

7.1 Wahr.



7.2 Falsch. Zum Beispiel für $a > 0$ steigender Funktionsgraph und für $a < 1$ fallender Funktionsgraph.

7.3 Wahr.



7.4 Falsch. Der Graph hat eine Nullstelle bei $x = 0$.

7.5 Wahr.

